RECHERCHES

SUR LE

FONCTIONNEMENT DES ORGANES DE LA SUSPENSION

DANS LES LOCOMOTIVES

Par M. A. HERDNER,

Ingénieur en chef,

adjoint a l'ingénieur en chef du matériel et de la traction

des chemins de fer du Midi

L'étude des mouvements parasites des locomotives, autrement dit des mouvements oscillatoires de translation ou de rotation que l'on observe sur la plateforme d'une locomotive en marche, conduit à distinguer dans celle ci, comme d'ailleurs dans tout véhicule pourvu de ressorts de suspension, deux parties, qui sont :

Le *poids suspendu*, c'est-à-dire le système constitué par l'ensemble des pièces, organes ou parties d'organe supportés par les ressorts ;

Le *poids non suspendu* qui comprend l'ensemble des pièces, organes ou parties d'organe reposant directement sur la voie ou sur les essieux.

Posé sur des appuis élastiques, le premier de ces deux systèmes est susceptible de prendre, par rapport au second, sous l'influence de forces dites perturbatrices, des mouvements relatifs plus ou moins rapides, plus ou moins étendus et pouvant influer plus ou moins défavorablement sur la stabilité de la machine. Ce sont ces mouvements, leurs lois et leurs conséquences que nous nous proposons d'étudier.

A cet effet, nous déterminerons tout d'abord la nature et l'amplitude des déplacements que devrait effectuer la masse suspendue pour passer de sa position d'équilibre normale à une position d'équilibre différente, dans laquelle elle serait maintenue par une force perturbatrice d'intensité et de direction invariables, mais orientée comme on voudra. Cette première partie, qui comprend la théorie du centre élastique de la suspension, celle des altitudes critiques du centre de gravité, enfin celle des suspensions folles, est une contribution à ce qu'on pourrait appeler la *statique du poids suspendu*. Nous la diviserons en deux chapitres : le premier sera exclusivement consacré aux locomotives à châssis unique posé sur des ressorts indépendants; dans le second, nous examinerons le cas des locomotives à bogie et celui des ressorts conjugués par des balanciers, longitudinaux ou transversaux.

Nous passerons ensuite à l'étude des mouvements qu'imprimeraient à la masse suspendue, dans des conditions bien déterminées, des forces perturbatrices variables et plus spécialement des forces périodiques. Ce sera la partie *dynamique* de notre travail. Elle aussi comprendra deux chapitres : dans le premier, nous ferons abstraction des résistances passives ; dans le second, nous nous occuperons des frottements intérieurs des ressorts, et de leur influence sur les mouvements oscillatoires du poids suspendu.

Enfin, dans un dernier chapitre, où nous ferons ressortir les conséquences pratiques qui nous paraîtront découler de nos formules, nous étudierons l'influence que peuvent avoir sur la stabilité des locomotives les principaux éléments et les dispositions les plus usuelles du mécanisme de la suspension.

Les hypothèses que nous plaçons à la base de notre étude ou qui limiteront le champ de nos investigations sont les suivantes :

1° Nous supposerons la voie parfaitement horizontale et indéformable, sauf à examiner ultérieurement quels pourraient être les effets de dénivellations accidentelles ou périodiques ;

2° Nous supposerons de même les châssis de locomotive et de bogie parfaitement rigides et indéformables ;

3° Nous n'envisagerons que le cas général où la machine est pourvue d'un nombre de ressorts égal à celui de ses roues ;

4° Enfin, nous admettrons que les flexibilités des ressorts de suspension sont indépendantes des charges qu'ils supportent.

I.

Parmi les forces perturbatrices susceptibles d'imprimer un déplacement relatif à la masse suspendue ou, pour ne pas sortir du domaine de la statique, de maintenir cette masse dans une position d'équilibre différente de sa position d'équilibre habituelle, les plus intéressantes sont évidemment les forces verticales. C'est d'elles que nous nous occuperons en premier lieu.

Nous examinerons successivement :

1° Les conditions que doit remplir une force verticale située dans le plan méridien de la machine pour que le déplacement imposé à la masse suspendue se réduise à une translation ;

2° Les effets produits par un couple situé dans un plan parallèle au plan méridien ;

3° Les effets produits par un couple situé dans un plan tranversal ;

4° Les effets produits par une force verticale quelconque.

Nous montrerons ensuite comment les conclusions auxquelles nous conduira cette étude peuvent être étendues au cas de forces perturbatrices horizontales et à celui des forces dirigées d'une manière quelconque.

Effet d'une force verticale située dans le plan méridien. — Condition pour qu'il n'y ait pas de rotation. — Suivant que la force considérée sera appliquée à l'avant ou à l'arrière de la masse suspendue, elle déterminera une rotation générale de cette masse, soit dans un sens, soit dans l'autre ; mais on conçoit que si son point d'application a été convenablement choisi elle ne puisse produire qu'une translation verticale de la masse considérée. La condition que doit remplir l'abscisse de ce point est facile à établir.

Considérons le cas général d'une machine à p essieux (Fig. 1) et soient :

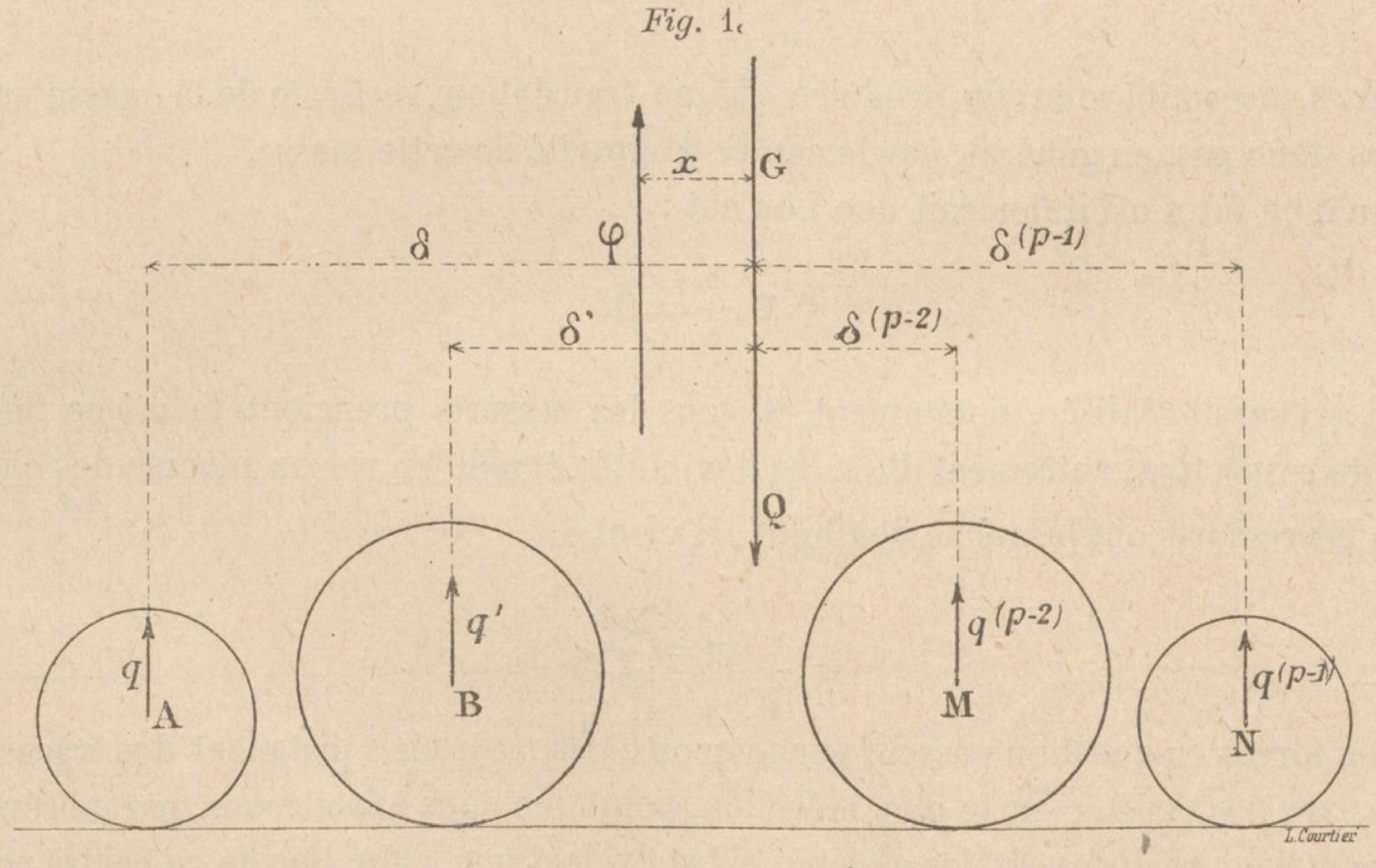
$$\delta, \delta', \delta'', \ldots\ldots\ldots\ldots \delta^{(p-1)}.$$

les distances, positives ou négatives, de chaque essieu à la verticale passant par le centre de gravité G du poids suspendu.

Soient également, de chaque côté de la machine

$$q, q', q'', \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots q^{(p-1)}$$

Fig. 1.



les réactions de chacun des ressorts de suspension que nous supposons indépendants les uns des autres, et

$$\Delta q, \Delta q', \Delta q'' \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Delta q^{(p-1)}$$

les variations positives ou négatives que subissent ces réactions sous l'influence d'une force verticale φ située dans le plan méridien, à une distance x de la verticale du centre de gravité. Il est évident que si la force φ est positive, c'est-à-dire, dirigée de bas en haut, les réactions Δq, $\Delta q'$... etc. seront négatives et réciproquement.

Soient enfin

$$i, i', i'', \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots i^{(p-1)}$$

la flexibilité des ressorts des différents essieux.

Leurs flèches subiront sous l'influence de la force φ les variations :

$$i\Delta q, i'\Delta q', i''\Delta q'' \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots i^{(p-1)}\Delta q^{(p-1)}$$

et si on considère les deux côtés de la machine ou aura les équations d'équilibre

$$2(\Delta q + \Delta q' + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \Delta q^{(p-1)}) = -\varphi \qquad (1)$$

$$2(\Delta q \delta + \Delta q' \delta' + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Delta q^{(p-1)} \delta^{(p-1)}) = -\varphi x \qquad (2)$$

Pour que le déplacement de la masse suspendue supposée parfaitement rigide, se réduise à une translation, il faut, en outre, qu'on ait la série d'égalités :

$$\left.\begin{array}{l} i\,\Delta q \quad = -z \\ i'\,\Delta q' \quad = -z \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ i^{(p-1)}\,\Delta q^{(p-1)} = -z \end{array}\right\} \qquad (3)$$

z étant l'amplitude de cette translation.

On en déduit aisément :

$$x = \frac{\frac{\delta}{i} + \frac{\delta'}{i'} + \dots\dots\dots\dots + \frac{\delta^{(p-1)}}{i^{(p-1)}}}{\frac{1}{i} + \frac{1}{i'} + \dots\dots\dots\dots + \frac{1}{i^{(p-1)}}} = \frac{\Sigma \frac{\delta}{i}}{\Sigma \frac{1}{i}} \qquad (4)$$

Les forces susceptibles de ne produire qu'une translation verticale de la masse suspendue ne passent donc pas, en général, par le centre de gravité de cette masse.

Pour qu'il en fût ainsi il faudrait que l'on eût :

$$\Sigma \frac{\delta}{i} = 0$$

condition qui serait réalisée, notamment, si tous les ressorts prenaient la même flèche sous leur charge respective, autrement dit si les flexibilités étaient en raison inverse des charges.

Si tous les ressorts ont la même flexibilité, il vient

$$x = \frac{\Sigma\delta}{p}$$

et alors les forces en question passent par le centre des moyennes distances des traces A, B,... M, N des axes des essieux sur le plan méridien, point que nous appellerons, par abréviation, le centre des moyennes distances des essieux. Il est évident que l'abscisse de ce centre se confond avec celle du centre de gravité du poids suspendu lorsque tous les ressorts sont également chargés.

Considérons, par exemple, une machine-tender, dont le poids suspendu varie entre des limites relativement éloignées. Si on désire que le tablier de cette machine reste horizontal quel que soit l'état des approvisionnements d'eau et de combustible, il faut que le centre de gravité de ces approvisionnements se déplace sur la verticale du plan méridien dont l'abscisse est x.

Quant à l'amplitude de la translation due à la force φ elle a pour expression :

$$z = \frac{\varphi}{2\,\Sigma \frac{1}{i}} \qquad (5)$$

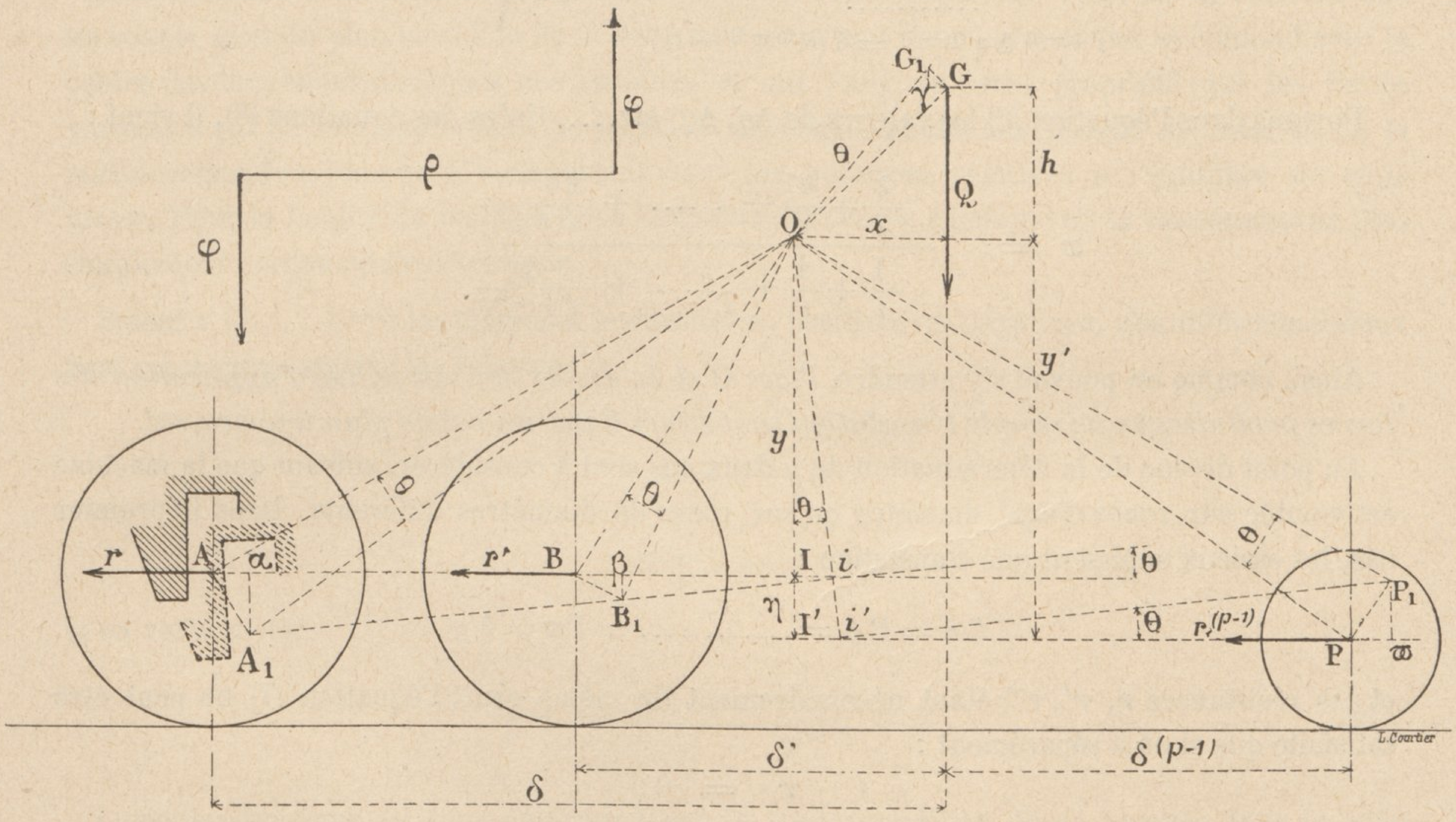
et si tous les ressorts sont de même flexibilité

$$z = \frac{\varphi\, i}{2\,p}$$

formule qu'on eût pu écrire immédiatement.

Effet d'un couple situé dans le plan méridien. — Détermination de l'axe de la rotation. — Appliquons actuellement à la masse suspendue un couple $\varphi\rho$ (Fig. 2), situé dans le plan méridien ou dans un plan parallèle au plan méridien et tendant à faire tourner l'ensemble du système autour d'un axe transversal O. Nous nous proposons de déterminer les distances x et y de cet axe à la verticale du centre de gravité et à un plan horizontal passant par les axes des essieux A et B que nous supposons accouplés et, par conséquent, pourvus de roues d'égal diamètre.

Fig. 2.



Soit θ l'angle dont tournera le système sous l'influence du couple $\varphi\rho$. Le point A considéré comme lié au poids suspendu viendra en A_1 en imposant à l'essieu un déplacement horizontal $A\alpha$ et à chacun des ressorts correspondants une flèche supplémentaire $A_1\alpha$. En raison de la petitesse de l'angle θ nous pouvons poser

$$A\alpha = \theta y$$
$$A_1\alpha = \theta(\delta - x) = i\,\Delta q$$

De même l'essieu P se déplacera vers l'avant d'une quantité

$$P\varpi = \theta y'$$

y' étant la hauteur de O au-dessus de P, et les ressorts correspondants subiront une perte de flèche

$$P_1\varpi = \theta(\delta^{(p-1)} - x) = i^{(p-1)}\,\Delta q^{(p-1)}$$

Appelons

$$r,\ r',\ r'' \ldots\ldots\ldots\ldots\ r^{(p-1)}$$

les résistances opposées par les divers essieux aux déplacements tels que $A\alpha$, nous aurons les équations d'équilibre :

$$\Delta q + \Delta q' + \dots\dots\dots\dots\dots + \Delta q^{(p-1)} = 0 \qquad (6)$$

$$r + r' + \dots\dots\dots\dots\dots + r^{(p-1)} = 0 \qquad (7)$$

D'autre part, les conditions relatives à la rigidité du châssis peuvent s'écrire en vertu de ce qui précède :

$$\left.\begin{array}{r} i\,\Delta q = \theta\,(\delta - x) \\ i'\,\Delta q' = \theta\,(\delta' - x) \\ \dots\dots\dots \\ i^{(p-1)}\,\Delta q^{(p-1)} = \theta\,(\delta^{(p-1)} - x) \end{array}\right\} \qquad (8)$$

Portons dans l'équation (6) les valeurs de Δq, $\Delta q'$ etc...., tirées des équations (8), il vient :

$$x = \frac{\dfrac{\delta}{i} + \dfrac{\delta'}{i'} + \dots\dots + \dfrac{\delta^{(p-1)}}{i^{(p-1)}}}{\dfrac{1}{i} + \dfrac{1}{i'} + \dots\dots + \dfrac{1}{i^{(p-1)}}}.$$

Ainsi, comme on pouvait s'y attendre, *l'axe* O *et la droite lieu des points d'application des forces produisant une simple translation sont situés dans un même plan transversal.*

Au point de vue de la détermination de y deux cas sont à considérer, suivant que la machine est montée sur roues d'égal diamètre ou sur roues de diamètres différents. Dans le premier cas, les essieux subissent une translation :

$$A\alpha = B\beta = \dots\dots\dots\dots = P\varpi = \theta\, y$$

et les résistances r, r', r'' étant nécessairement de même sens, l'équation (7) ne peut être satisfaite que si on a séparément :

$$\begin{array}{rl} r & = 0 \\ r' & = 0 \\ \dots\dots & \dots\dots \\ r^{(p-1)} & = 0 \end{array}$$

ce qui exige qu'on ait aussi

$$y = 0$$

Donc dans le cas d'une locomotive montée sur roues d'égal diamètre *l'axe de la rotation effectuée par le poids suspendu sous l'influence d'un couple exerçant son action parallèlement au plan méridien, est situé dans le plan horizontal mené par les axes des essieux.*

Si les essieux sont à des hauteurs différentes, les translations $A\alpha$, $B\beta$, etc., et par conséquent les résistances r, r'...... $r^{(p-1)}$ pouvant être de sens contraires, l'équation (7) exige seulement que l'ensemble Σ R des résistances des essieux les plus élevés au-dessus du rail ait une valeur égale et de signe contraire à l'ensemble $\Sigma\, r$ des résistances des autres essieux et, par suite, que le point O venant se projeter entre I et I′, l'axe de la rotation soit à une hauteur *intermédiaire* entre celle des différents essieux.

Or, on peut considérer comme évident que l'ensemble des essieux moteurs et accouplés opposeront aux déplacements tels que $A\alpha$, $B\beta$, etc., une résistance notablement plus considérable que les essieux porteurs. Par suite, ces derniers seuls se déplaceront, si besoin est, et O se confondra avec le point I. Nous sommes ainsi amenés à conclure que *dans tous les cas l'axe de la rotation considérée est situé au niveau des essieux accouplés.*

Nous pouvons ajouter que les deux facteurs du déplacement θy étant relativement petits, ce déplacement est lui-même très petit et de l'ordre des jeux que présentent ordinairement les essieux porteurs dans leurs glissières, toujours dépourvues de coins de serrage. Il en résulte que Σr et par conséquent aussi ΣR peuvent être considérés comme négligeables dans les cas ordinaires de la pratique.

Définition du centre élastique. — Le point d'intersection de l'axe de la rotation due au couple $\varphi\rho$ et du plan méridien de la machine, point qui dans certains cas se confond avec le centre des moyennes distances des essieux, et qui jouit de cette propriété que les forces verticales qui lui sont appliquées ne sauraient provoquer aucun mouvement de rotation de la masse suspendue, joue un rôle important dans les questions relatives à l'équilibre de cette masse. Pour la facilité du langage nous l'appellerons *centre élastique de la suspension* ou plus simplement encore *centre élastique*.

Soient $\lambda, \lambda' \ldots\ldots \lambda^{(p-1)}$ les distances horizontales, positives ou négatives, des différents essieux à ce point, nous aurons les relations :

$$\begin{aligned} \lambda &= \delta - x \\ \lambda' &= \delta' - x \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda^{(p-1)} &= \delta^{(p-1)} - x \end{aligned}$$

et en vertu de (4)

$$\frac{\lambda}{i} + \frac{\lambda'}{i'} + \cdots\cdots \frac{\lambda^{(p-1)}}{i^{(p-1)}} = 0 \tag{9}$$

Le centre élastique est donc déterminé par la triple condition de se trouver dans le plan méridien, dans le plan horizontal passant par les axes des essieux accouplés et de satisfaire à l'équation (9).

Détermination de l'amplitude de la rotation. — L'équation des moments que nous prendrons par rapport à l'axe O nous permettra de déterminer l'amplitude θ de la rotation. Si on remarque que le centre de gravité du poids suspendu, en se transportant de G en G_1 subit une translation horizontale $G\gamma = \theta h$ et que, par suite, le moment Qx du poids considéré éprouve une variation égale à $+ Q\theta h$, h étant la distance verticale du centre de gravité à l'axe de la rotation, l'équation des moments s'écrira

$$2\,\Sigma\lambda\,(q + \Delta q) - (Qx + Q\theta h) = \varphi\rho - \Sigma ry \qquad (*)$$

ou après réductions

$$2\,\Sigma\lambda\Delta q - Q\theta h = \varphi\rho - \Sigma ry \tag{10}$$

(*) Dans cette équation, comme dans toutes les équations analogues, nous comprenons sous le signe Σ un nombre de termes égal à celui des essieux. Les expressions Σq, $\Sigma\Delta q$, etc. ne se rapportent donc qu'à un seul côté de la machine. Pour la machine entière nous écrirons toujours $2\Sigma q$, $2\Sigma\Delta q$, etc.

étant entendu, d'après ce qui précède, que les roues porteuses seules fournissent des termes en y. Mais les équations (8) donnent

$$\Sigma \Delta q\,(\delta - x) = \theta \Sigma \frac{(\delta - x)^2}{i}$$

que nous écrirons

$$\Sigma \lambda \Delta q = \theta \Sigma \frac{\lambda^2}{i}$$

Portant cette valeur de $\Sigma \lambda \Delta q$ dans l'équation (10) nous trouvons enfin

$$2\,\theta \Sigma \frac{\lambda^2}{i} - Q\theta h = \varphi \rho - \Sigma r y \qquad (11)$$

d'où

$$\theta = \frac{\varphi \rho - \Sigma r y}{2\,\Sigma \frac{\lambda^2}{i} - Qh} \qquad (12)$$

Qh est le plus souvent *très petit* par rapport à $2\,\Sigma \frac{\lambda^2}{i}$ et peut être négligé. Si d'ailleurs on a simultanément $y = 0$ et $i = i' = i''$, etc..., comme c'est presque toujours le cas des locomotives à adhérence totale, l'expression ci-dessus devient

$$\theta = \frac{\varphi \rho i}{2\,\Sigma \lambda^2}$$

et alors *l'amplitude de la rotation* due au couple $\varphi\rho$, *proportionnelle au moment de ce couple et à la flexibilité des ressorts, est en raison inverse de la somme des carrés des distances des essieux à l'axe de la rotation.*

La formule (12) montre d'ailleurs que *l'amplitude de la rotation augmente avec l'altitude du centre de gravité.*

En pratique et étant données les limites entre lesquelles peut varier h, cet accroissement est négligeable. Il n'en est pas moins intéressant d'examiner le cas hypothétique où h serait assez grand pour qu'on ait :

$$Qh = 2\,\Sigma \frac{\lambda^2}{i}$$

et où, par suite, la formule (12) donnerait pour θ une valeur infinie.

L'interprétation de ce résultat est facile si on considère que l'égalité ci-dessus exprime simplement qu'il s'établit un équilibre constant et indépendant de θ entre les réactions des ressorts et l'action de la pesanteur, et que, par suite, en l'absence de toute force perturbatrice, la masse suspendue se trouve en état d'*équilibre indifférent.* Dans ces conditions, l'effet d'un couple perturbateur quelconque, si minime fût-il, serait d'imprimer à cette masse une rotation dont l'amplitude serait en apparence illimitée, puisqu'on ne pourrait plus compter sur les ressorts pour équilibrer ce couple.

En fait, le mouvement ne s'arrêtera que grâce à l'intervention de résistances dont il n'a pas été tenu compte dans l'équation (10) et qui résulteront en général de ce que les pièces du châssis viendront buter contre la face supérieure ou la face inférieure des boîtes à graisse.

Si on continue à faire grandir h de telle sorte que

$$h > \frac{2}{Q} \Sigma \frac{\lambda^2}{i}$$

θ devient négatif, ce qui prouve que pour maintenir le poids suspendu en équilibre dans la position considérée, il faut lui appliquer un couple — $\varphi\rho$, de sens contraire à celui que nous avons supposé. Que ce couple vienne à disparaître et le poids suspendu subira l'influence grandissante du couple $\theta\left(Qh - 2\,\Sigma\,\frac{\lambda^2}{i}\right)$ jusqu'à ce qu'un obstacle quelconque intervienne. Dans ce cas l'équilibre qui a lieu pour $\theta = 0$ et $\varphi\rho = 0$ est *instable* et *la suspension est folle.*

L'altitude $H = \frac{2}{Q} \Sigma \frac{\lambda^2}{i}$ pour laquelle la suspension est indifférente, et au-delà de laquelle celle-ci devient folle, est l'*altitude critique du centre de gravité* relative à la rotation considérée. Elle grandit avec l'empattement, le nombre des essieux et la roideur des ressorts.

Bien que dans le cas général qui nous occupe l'altitude du centre de gravité soit toujours très petite par rapport à H, l'altitude critique est un élément dont la considération nous sera souvent utile dans la suite.

Effet d'un couple situé dans un plan transversal. — Ce cas, très analogue au précédent, en diffère cependant par un point important. Dans le sens longitudinal les boîtes d'essieu sur lesquelles reposent les ressorts ou auxquelles ceux-ci sont suspendus, suivent librement l'inclinaison du châssis sans qu'aucun jeu soit nécessaire entre les boîtes et leurs coulisseaux. Il n'en est pas de même dans les mouvements de rotation que la masse suspendue peut être sollicitée d'effectuer autour d'un axe horizontal parallèle au plan méridien, et si, d'une part, le châssis était parfaitement rigide, si, d'autre part, les coulisseaux n'avaient aucun jeu entre les joues des boîtes, les mouvements en question seraient en général, impossibles. Nous ne tiendrons pas compte, dans ce qui suit, du défaut de rigidité du châssis, mais nous admettrons que les coulisseaux pourront prendre, par rapport aux joues des boîtes, toutes les inclinaisons utiles.

Soient :

AA′, BB′,.... PP′, les différents essieux d'une locomotive ;

q_a, q'_a, q_b q'_b, etc... les charges imposées à ces essieux par les ressorts correspondants et appliquées respectivement aux points A, A′, B, B′, etc.......

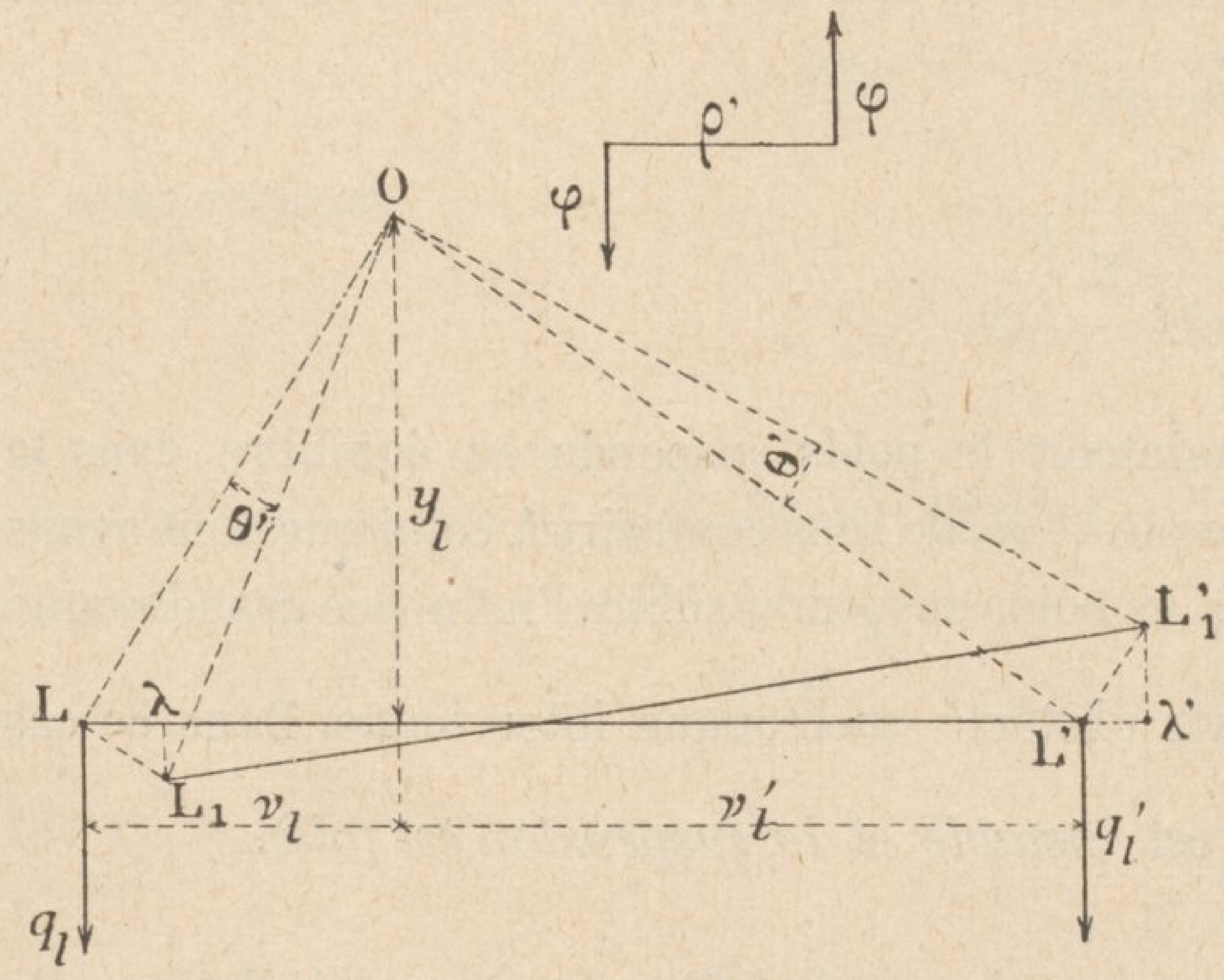
ν_a, ν'_a, ν_b, ν'_b etc..... les distances, positives ou négatives des points A, A′, B, B′, etc..... au plan vertical contenant l'axe de la rotation ;

y_a, y_b,............ y_p les distances positives ou négatives des essieux au plan horizontal contenant l'axe de la rotation ;

θ' l'amplitude de celle-ci.

Prenons pour plan de la Fig. 3 le plan vertical mené par l'axe de l'essieu quelconque LL′ et soit O la trace de l'axe de la rotation sur ce plan. Sous l'action du couple $\varphi\rho'$, les points L et L′ considérés comme liés au poids suspendu viendront en L_1 et L'_1 ; en même temps le ressort de gauche subira une compression λL_1 tandis que le ressort de droite éprouvera une détente $\lambda' L'_1$; enfin les points d'application L, L′, des charges $q_l\ q'_l$ c'est-à-dire, en pratique, les crapaudines d'appui des ressorts, les boîtes et les coussinets d'essieux, sinon les essieux eux-mêmes effectueront un déplacement transversal $L\lambda = L'\lambda' = \theta' y^l$ auquel ces organes opposeront d'ailleurs une résistance s_l dont la direction est celle de λ vers L.

Fig. 3.



On a évidemment pour l'équilibre du poids suspendu :

$$\Delta q_a + \Delta q'_a + \Delta q_b + \Delta q'_b + \ldots\ldots = 0 \qquad (13)$$

$$s_a + s_b + \ldots\ldots\ldots\ldots = 0 \qquad (14)$$

et pour les différents ressorts de suspension, étant entendu que ceux d'un même essieu ont, à droite et à gauche, la même flexibilité :

$$\left.\begin{array}{l} i_a\, \Delta q_a = \theta' v_a \\ i_b\, \Delta q_b = \theta' v_b \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \qquad (15)$$

$$\left.\begin{array}{l} i_a\, \Delta q'_a = \theta' v'_a \\ i_b\, \Delta q'_b = \theta' v'_b \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \qquad (15 \text{ bis})$$

En portant dans l'équation (13) les valeurs de $\Delta q_a\ \Delta q'_a$ etc., tirées des relations (15) et (15 bis), il vient

$$\Sigma\, \frac{v_a + v'_a}{i_a} = 0$$

Mais les binômes $v_a + v'_a$, $v_b + v'_b$ etc., étant égaux entre eux, l'équation ci-dessus ne peut être satisfaite que si on a séparément

$$\begin{array}{l} v'_a = \ -v_a \\ v'_b = \ -v_b \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

donc l'*axe* O *est situé dans le plan méridien.*

Si la machine considérée est à adhérence totale, ou si, sans être à adhérence totale, toutes ses roues sont d'égal diamètre, de telle sorte qu'on ait

$$y_a = y_b = \ldots\ldots\ldots\ldots y$$

l'équation (14) exige d'autre part que l'on ait séparément

$$s_a = 0$$
$$s_b = 0$$
$$\ldots\ldots$$

Par suite aussi

$$A\alpha = A'\alpha' = \theta' y = 0$$
$$B\beta = B'\beta' = \theta' y = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

donc y est nul et l'axe de la rotation est situé dans le plan des axes des essieux.

Si la machine est montée sur roues de diamètres différents l'équation (14) exprime qu'il y a équilibre entre les résistances opposées au glissement de leurs boîtes, d'une part par les essieux les plus élevés, généralement accouplés entre eux et, d'autre part, par les essieux les moins élevés, généralement porteurs, et dans ces conditions il semble que l'axe de la rotation doive être situé à une hauteur intermédiaire entre celle des différents essieux. Mais des résistances telles que s_a peuvent s'exercer sans qu'il y ait mouvement et comme l'ensemble des essieux moteurs et accouplés supportent généralement la plus grande partie du poids suspendu de la machine, comme d'autre part leurs boîtes n'ont dans le sens de l'axe des essieux qu'un jeu très limité, tandis que les boîtes des essieux porteurs ont ordinairement un jeu notable, contrôlé ou non par des organes de rappel, il est évident que les premières se déplaceront, en général, beaucoup plus difficilement que les secondes qui, par suite, se déplaceront seules.

Nous pouvons admettre, sans erreur sensible, qu'il en est toujours ainsi, autrement dit que l'axe de la rotation est toujours situé à l'intersection du plan méridien avec le plan horizontal mené par l'axe des essieux accouplés et que, par suite, *il passe par le centre élastique de la suspension.*

Soit h la hauteur du centre de gravité de la masse suspendue au dessus de l'axe de la rotation. L'équation des moments prise par rapport à cet axe est

$$2\,\Sigma\nu\,\Delta q = \varphi\rho' - \Sigma s y + Q\theta' h$$

étant entendu que la première somme comprend autant de termes qu'il y a d'essieux, alors que les essieux porteurs seuls fournissent des termes à la deuxième.

L'élimination de Δq_a, $\Delta q'_a$ etc....., entre cette équation et les relations (15) et (15 *bis*) donne pour l'amplitude de la rotation

$$\theta' = \frac{\varphi\rho' - \Sigma s y}{2\,\Sigma\frac{\nu^2}{i} - Qh} \qquad (16)$$

formule presque identique à la formule (12) et qu'on discuterait de même.

On remarquera toutefois que $\Sigma \frac{\nu^2}{i}$ est une quantité notablement inférieure à $\Sigma \frac{\lambda^2}{i}$ et que, par suite, Qh n'est plus aussi aisément négligeable que dans la formule (12). De même, l'altitude critique du centre de gravité tirée de la formule (16) est beaucoup plus petite que dans le cas d'une rotation autour d'un axe transversal, ainsi qu'il est aisé de s'en assurer par un exemple.

Si on néglige à la fois Qh et Σsy et qu'on pose

$$i_a = i_b = \ldots\ldots\ldots\ldots = i$$

$$\nu_a = \nu_b = \ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{\varepsilon}{2}$$

ε étant l'écartement commun des ressorts d'un même essieu, il vient

$$\theta' = \frac{2\,\varphi\rho' i}{p\varepsilon^2}$$

et alors *l'amplitude de la rotation due à l'action d'un couple transversal est en raison inverse du carré de l'écartement des ressorts de suspension.*

Effet d'une force verticale quelconque. — Définitions. — Soient actuellement (Fig 4) :

O	le centre élastique d'une machine,
OX, OY, OZ	les trois axes, longitudinal, transversal et vertical passant par ce centre.
φ	une force verticale quelconque appliquée à la masse suspendue en un point M dont les coordonnées horizontales sont ρ et ρ'.

Nous pouvons toujours transporter le point d'application de cette force en un point quelconque M_1 de l'axe OZ et, par suite, la remplacer par la force φ_1 moyennant l'adjonction de deux couples $(\varphi_2\ \varphi_4)$ et $(\varphi\varphi_3)$.

Or, la force φ produira un soulèvement général du poids suspendu dont l'amplitude est en vertu de (5)

$$z = \frac{\varphi}{2\,\Sigma \frac{1}{i}}$$

et les couples $(\varphi_2\ \varphi_4)$, $(\varphi\varphi_3)$ provoqueront autour des axes OY et OX des rotations dont l'amplitude respective est en vertu des équations (12) et (16)

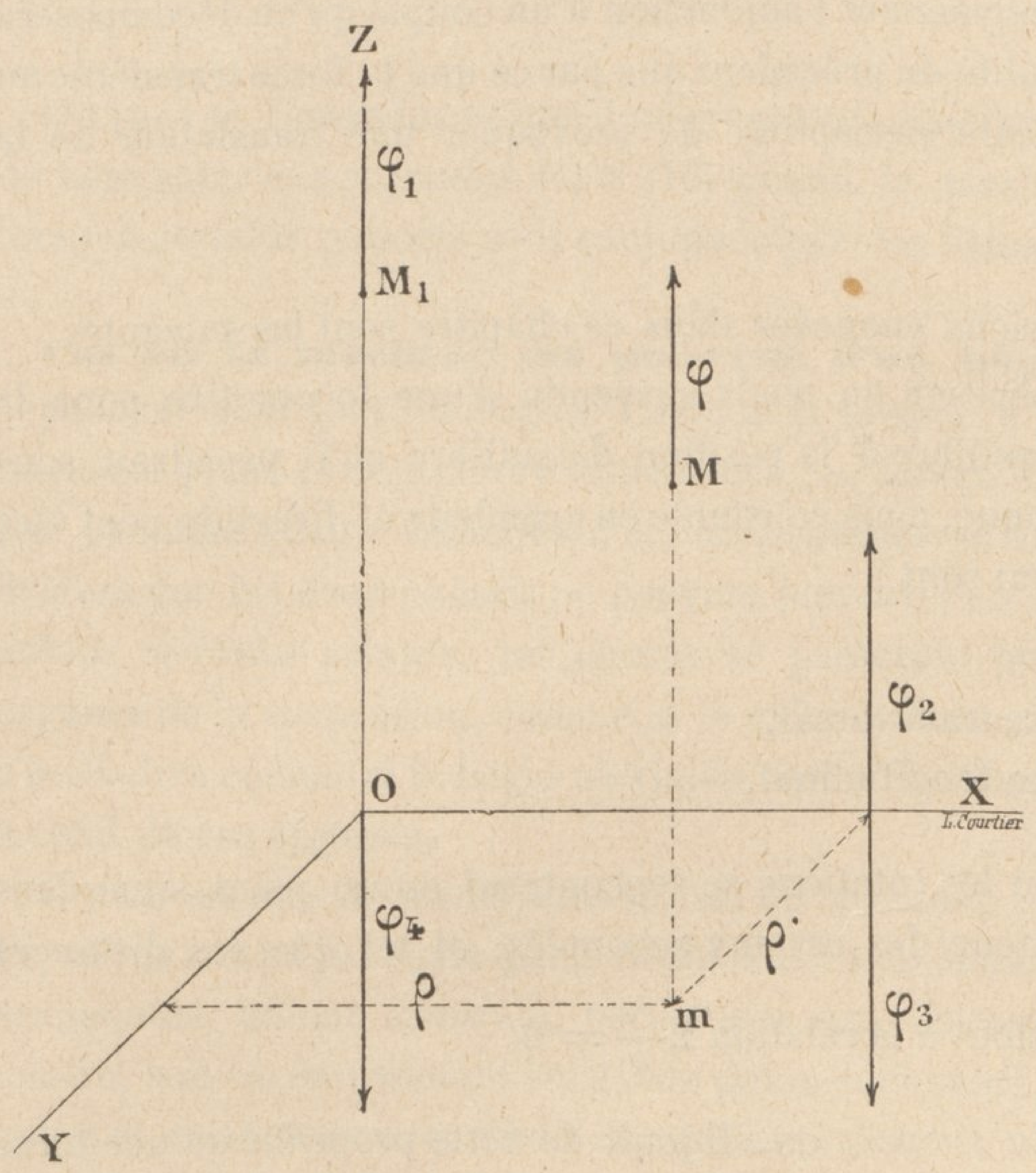
$$\theta = \frac{\varphi\rho - \Sigma ry}{2\,\Sigma \frac{\lambda^2}{i} - Qh}$$

$$\theta' = \frac{\varphi\rho' - \Sigma sy}{2\,\Sigma \frac{\nu^2}{i} - Q}$$

Ces amplitudes étant en général très faibles, les trois déplacements produits simultanément par la force φ peuvent être considérés comme s'effectuant chacun indépendamment des deux autres.

Supposons que la force φ et, par suite, aussi les forces φ_1, φ_2, φ_3, φ_4, au lieu de rester constantes comme nous venons de le supposer, varient plus ou moins régulièrement entre un maximum et un minimum déterminés. A chaque valeur de φ correspondra une valeur différente de z, θ, θ', et l'équilibre statique ne pouvant à aucun moment s'établir, il se produira simultanément trois mouvements oscillatoires qui se composeront entre eux, savoir :

Fig. 4.



1° Sous l'influence de la force variable φ, un mouvement oscillatoire de translation du système suivant la direction OZ et que nous appellerons *mouvement de trépidation*.

2° Sous l'influence du couple variable φ_3 φ_4, un mouvement oscillatoire de rotation autour de l'axe OY, qu'on appelle généralement *mouvement de galop*.

3° Sous l'influence du couple variable φ φ_3, un mouvement oscillatoire de rotation autour de l'axe OX, qui a reçu le nom de *mouvement de roulis*.

L'étude de ces mouvements devant faire l'objet de chapitres ultérieurs, nous n'en donnons ici la définition que pour nous permettre de désigner plus simplement les trois axes principaux OX, OY, OZ, qui passent par le centre élastique de la suspension.

L'axe OZ sera dorénavant *l'axe de la trépidation*.

L'axe OY sera dorénavant *l'axe du galop*.

L'axe OX sera dorénavant *l'axe du roulis*.

Effet d'une force horizontale quelconque. — Le point d'application d'une force horizontale quelconque peut toujours être transféré au centre élastique moyennant l'adjonction d'un couple qui pourra être décomposé ensuite en trois autres couples situés respectivement dans un plan horizontal, dans un plan longitudinal et dans un plan transversal.

Or, il est évident que ni la force horizontale transportée au centre élastique ni le couple situé dans le plan horizontal ne seront susceptibles de modifier la flèche des ressorts de suspension. Quant aux deux couples situés dans un plan longitudinal et dans un plan transversal, nous savons, d'après ce qui précède, qu'ils provoqueront l'un et l'autre une rotation de la masse suspendue, le premier autour de l'axe du galop, le second autour de l'axe du roulis.

Les forces perturbatrices horizontales provoquent, par suite, les mêmes mouvements de rotation que les forces verticales, mais, contrairement à ce qui a lieu pour ces dernières, elles ne sauraient provoquer aucun mouvement de translation.

Effet d'une force perturbatrice dirigée d'une manière quelconque. — Enfin, si la force perturbatrice a une direction absolument quelconque, nous pourrons, comme tout à l'heure, l'appliquer au centre élastique moyennant l'adjonction d'un couple qu'on décomposera comme ci-dessus. Ce cas ne diffère en réalité du précédent que par ce que la force transférée au centre élastique a une composante verticale susceptible de provoquer une translation de la masse suspendue.

Résumé. — Les principales conclusions énoncées dans ce chapitre sont les suivantes :

I. — Le déplacement qu'il faudrait imposer au poids suspendu d'une locomotive pour le faire passer de sa position habituelle d'équilibre à la position d'équilibre qu'il prendrait sous l'action d'une force perturbatrice quelconque, mais constante en grandeur et direction peut être décomposé, en général, en trois autres qui sont :

une translation verticale,
une rotation autour d'un axe transversal,
une rotation autour d'un axe longitudinal.

II. — Les axes autour desquels ont lieu les rotations se rencontrent en un point situé dans le plan méridien de la machine, à la hauteur des essieux accouplés, et tel que ses distances $\lambda, \lambda', \lambda''$...... aux différents essieux satisfont à la relation $\Sigma \frac{\lambda}{i} = 0$.

Ce point est *le centre élastique de la suspension*. Il jouit de cette propriété qu'une force perturbatrice verticale passant par ce point ne produirait qu'une translation du poids suspendu, non accompagnée de rotation. Les trois axes principaux, vertical, transversal et longitudinal, menés par ce point sont respectivement :

l'axe de la trépidation,
l'axe du galop,
l'axe du roulis.

III. — L'amplitude de la translation, proportionnelle à l'intensité de la composante verticale de la force perturbatrice croît avec la flexibilité des ressorts de suspension.

IV. — L'amplitude de chacune des rotations est sensiblement proportionnelle au moment de la force perturbatrice pris par rapport à l'axe correspondant. Elle est à peu près en raison inverse de la somme des carrés des distances des points d'appui des ressorts à l'axe de la rotation considérée, chacun de ces carrés étant divisé par la flexibilité du ressort correspondant. Elle croît, par suite, avec la flexibilité des ressorts. Elle croît également avec l'altitude du centre de gravité de la masse suspendue.

V. — Si la hauteur du centre de gravité au-dessus du centre élastique pouvait croître indéfiniment, la suspension deviendrait *indifférente* ou *folle*, suivant que cette altitude serait égale ou supérieure à la somme des carrés des distances des points d'appui des ressorts à l'axe de la rotation, chacun de ces carrés étant divisé par la flexibilité du ressort correspondant.

L'altitude ainsi définie est *l'altitude critique* relative à l'axe de la rotation considérée. L'altitude critique relative à l'axe du galop est notablement plus grande que l'altitude critique relative à l'axe du roulis.

II.

On peut se demander ce que deviennent ces conclusions et quelles modifications il y a lieu de faire subir aux formules (4) à (16) quand la machine est pourvue d'un bogie ou encore lorsque certains ressorts sont conjugués par des balanciers.

Cas où la machine est pourvue d'un bogie. — Cette question ne se pose pas cependant pour tous les bogies. Lorsque la surface d'appui du châssis principal sur celui du bogie est plane et de grandes dimensions, ou lorsqu'il y a plusieurs surfaces d'appui planes, par exemple quatre semelles d'appui disposées suivant les sommets d'un rectangle, il est évident que les deux châssis ne pouvant prendre l'un par rapport à l'autre ni trépidation, ni galop, ni roulis relatifs, les choses se passeront au point de vue du fonctionnement des organes de la suspension, comme si le châssis du bogie faisait corps avec le châssis principal, c'est-à-dire comme si le bogie n'existait pas. S'il comporte des balanciers, son rôle se réduira à celui de ces organes.

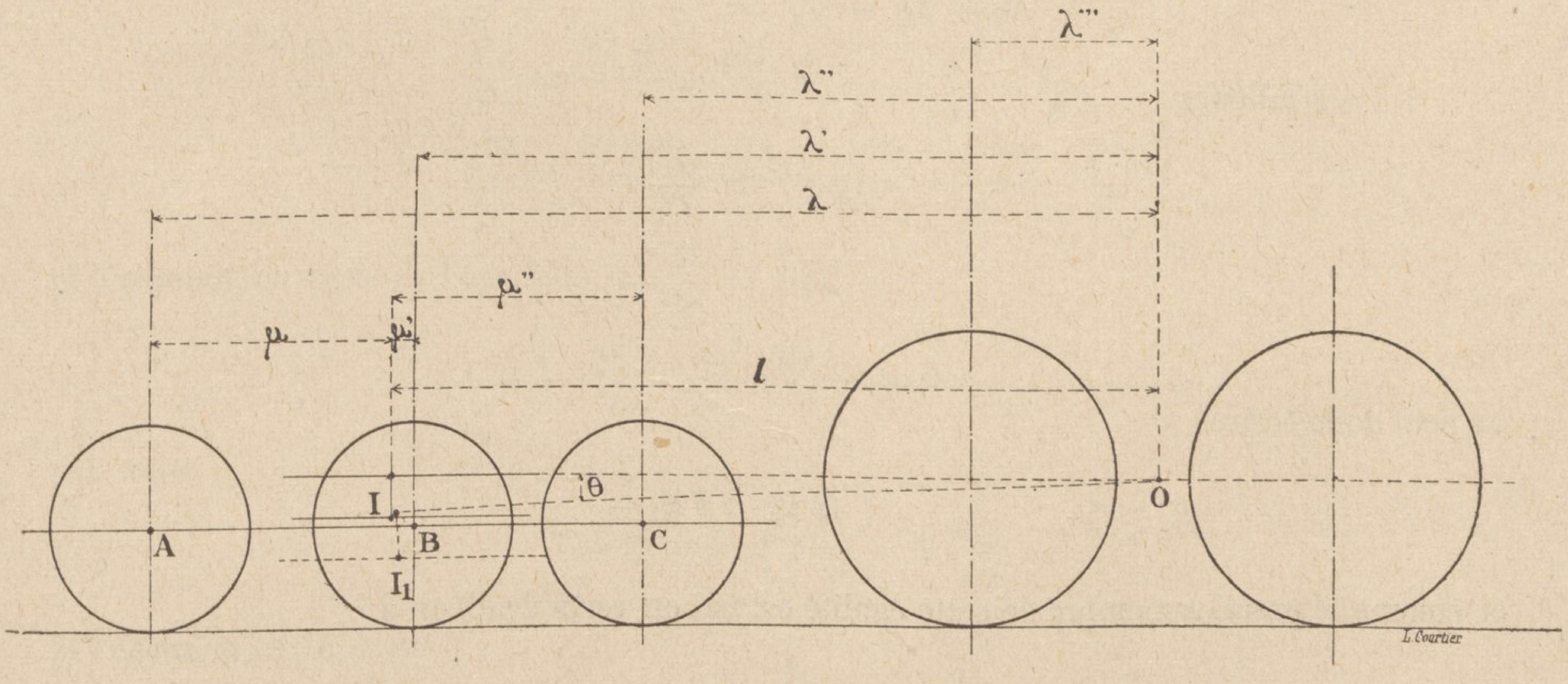
Il n'en est plus de même dans le cas, de beaucoup le plus fréquent, où le châssis principal repose sur celui du bogie par l'intermédiaire de deux crapaudines latérales mobiles, ou d'une crapaudine unique centrale, permettant aux deux châssis de prendre, l'un par rapport à l'autre, soit un mouvement relatif de galop seulement, soit à la fois un mouvement relatif de galop et un mouvement relatif de roulis.

Pour plus de généralité nous considèrerons le cas d'un bogie supporté par trois essieux A, B, C, (Fig. 5). Soit I la projection sur le plan de la figure du ou des points d'appui du châssis principal sur celui du bogie et désignons par

$$\mu, \mu', \mu'',$$

les distances positives ou négatives des essieux du bogie à la verticale du point I.

Fig. 5.



Le châssis du bogie devant rester horizontal quelles que soient les variations de charge pouvant résulter d'un galop relatif du châssis principal, *il faut que le ou les points d'appui du châssis principal et le centre élastique du bogie soient situés dans un même plan tranversal*, autrement dit que le point I satisfasse à la relation

$$\frac{\mu}{i} + \frac{\mu'}{i'} + \frac{\mu''}{i''} = 0 \tag{17}$$

Lorsque l'équation (17) est satisfaite, l'ensemble du poids suspendu peut être considéré comme indéformable sous l'action d'une force φ qui n'imposerait au châssis principal lui-même qu'une simple translation. Les équations (3) lui sont donc applicables, et comme d'ailleurs les équations (1) et (2) sont générales, il est clair que les formules (4) et (5) subsistent.

Remplaçons la force φ par un couple $\varphi\rho$. Il est encore évident que les équations d'équilibre (6) et (7) ne sont pas troublées par le groupement de trois des essieux sous un châssis distinct. Mais les trois premières des équations (8) cessent d'être satisfaites, et si l'équation (17), a lieu, doivent être remplacées par les trois suivantes :

$$i\,\Delta q = \theta l$$
$$i'\,\Delta q' = \theta l$$
$$i''\,\Delta q'' = \theta l$$

l étant la distance horizontale des points d'appui I à l'axe de la rotation du châssis principal.

On en tire

$$\begin{aligned}
\Delta q &= \frac{\theta l}{i} = \theta\left(\frac{\lambda}{i} - \frac{\mu}{i}\right)\\
\Delta q' &= \frac{\theta l}{i'} = \theta\left(\frac{\lambda'}{i'} - \frac{\mu'}{i'}\right)\\
\Delta q'' &= \frac{\theta l}{i''} = \theta\left(\frac{\lambda''}{i''} - \frac{\mu''}{i''}\right)
\end{aligned} \tag{18}$$

λ, λ' et λ'' étant les distances des essieux du bogie à l'axe de la rotation et, par suite, en tenant compte de (17)

$$\Delta q + \Delta q' + \Delta q'' = \frac{\theta\lambda}{i} + \frac{\theta\lambda'}{i'} + \frac{\theta\lambda''}{i''}$$

D'ailleurs

$$\Delta q''' = \frac{\theta\lambda'''}{i'''}$$

$$\Delta q^{\mathrm{IV}} = \frac{\theta\lambda^{\mathrm{IV}}}{i^{\mathrm{IV}}}$$

.....etc.....

on peut donc écrire

$$\Sigma\,\Delta q = \theta\,\Sigma\,\frac{\lambda}{i}$$

et comme le premier membre de cette égalité est nul en vertu de (6) on a

$$\Sigma\,\frac{\lambda}{i} = 0$$

Donc l'axe de la rotation passe par le centre élastique de la machine tel qu'il a été précédemment défini et *la présence d'un bogie ne change rien ni à la position ni aux propriétés du centre élastique.*

Soient actuellement :

Q le poids de la partie oscillante du poids suspendu ;

β le poids du châssis du bogie ;

x, x' les distances des centres de gravité correspondants à l'axe de la rotation en sorte que l'on ait

$$2\,\Sigma q = Q + \beta$$
$$2\,\Sigma\lambda q = Qx + \beta x'$$

Sous l'influence du couple perturbateur $\varphi\rho$ cette dernière équation devient

$$2\,\Sigma\lambda\,(q + \Delta q) - Qx - \beta x' - Q\theta h = \varphi\rho - \Sigma ry$$

ou après réductions

$$2\,\Sigma\lambda\Delta q - Q\theta h = \varphi\rho - \Sigma ry$$

Elle ne diffère donc pas de l'équation (10), étant entendu que Q ne représente plus ici la totalité du poids suspendu, mais uniquement celui qui participe à la rotation.

Portons dans cette équation les valeurs de Δq, $\Delta q'$, $\Delta q''$, fournies par les formules (18). La somme $2\,\Sigma\lambda\Delta q$ devient au facteur 2θ près

$$\frac{\lambda l}{i} + \frac{\lambda' l}{i'} + \frac{\lambda'' l}{i''} + \frac{\lambda'''^2}{i'''} \cdots\cdots\cdots + \frac{\lambda^{(p-1)^2}}{i^{(p-1)}}$$

mais les trois premiers termes se décomposent comme suit :

$$\frac{\lambda l}{i} = \frac{\lambda\,(\lambda - \mu)}{i} = \frac{\lambda^2}{i} - \frac{\mu^2}{i} - \frac{\mu l}{i}$$
$$\frac{\lambda' l}{i'} = \frac{\lambda'\,(\lambda' - \mu')}{i'} = \frac{\lambda'^2}{i'} - \frac{\mu'^2}{i'} - \frac{\mu' l}{i'}$$
$$\frac{\lambda'' l}{i''} = \frac{\lambda''\,(\lambda'' - \mu'')}{i''} = \frac{\lambda''^2}{i''} - \frac{\mu''^2}{i''} - \frac{\mu'' l}{i''}$$

et d'ailleurs, en vertu de l'équation (17)

$$\frac{\mu l}{i} + \frac{\mu' l}{i'} + \frac{\mu'' l}{i''} = 0$$

par suite

$$2\,\Sigma\lambda\Delta q = 2\theta\left(\Sigma\,\frac{\lambda^2}{i} - \Sigma\,\frac{\mu^2}{i}\right)$$

et l'équation (10) devient

$$2\theta\left(\Sigma\,\frac{\lambda^2}{i} - \Sigma\,\frac{\mu^2}{i}\right) - Q\theta h = \varphi\rho - \Sigma ry$$

d'où nous tirons

$$\theta = \frac{\varphi\rho - \Sigma ry}{2\left(\Sigma \frac{\lambda^2}{i} - \Sigma \frac{\mu^2}{i}\right) - Qh} \tag{19}$$

expression dans laquelle la somme des termes en μ^2 peut comprendre les éléments de plusieurs bogies.

Si on néglige le dernier terme du dénominateur par rapport aux deux premiers et si on suppose égales les flexibilités des divers ressorts de suspension, cette formule s'écrit

$$\theta = \frac{(\varphi\rho - \Sigma ry)\, i}{2(\Sigma\lambda^2 - \Sigma\mu^2)}$$

et alors l'*amplitude de la rotation due au couple* $\varphi\rho$ *est en raison inverse de la somme des carrés des distances des essieux à leur centre élastique, diminuée des sommes de carrés semblables fournies par chaque bogie considéré isolément.*

Il est évident que cette conclusion subsiste quel que soit le nombre des essieux groupés sous des châssis indépendants. Dans le cas, de beaucoup le plus fréquent, où ce nombre se réduit à deux, l'égalité de i et de i' emporte celle de μ et de μ' et si on désigne par b l'empattement du bogie, le dénominateur de l'expression ci-dessus peut encore se mettre sous la forme

$$2\left(\Sigma\lambda^2 - \frac{b^2}{2}\right)$$

s'il n'y a qu'un bogie, ou

$$2\left(\Sigma\lambda^2 - \frac{\Sigma b^2}{2}\right)$$

s'il y en a plusieurs. On peut donc encore dire, dans le cas considéré, que l'*amplitude de la rotation est en raison inverse de la somme des carrés des distances des essieux à l'axe de la rotation diminuée de la demi-somme des carrés des empattements des bogies.*

Le groupement de deux ou plusieurs essieux sous un ou plusieurs châssis distincts fait ainsi varier l'amplitude θ dans le même sens qu'une surélévation du centre de gravité. Par suite, *il a pour effet d'abaisser l'altitude critique de ce point, relative à l'axe du galop.*

Au point de vue des rotations qui ont lieu dans le sens du roulis, nous distinguerons les bogies *à appuis latéraux* des bogies *à appui sphérique central.* En raison de leur mode de construction les premiers participent nécessairement aux mouvements de rotation du châssis principal et les choses se passent comme si la machine n'était pas pourvue d'un bogie.

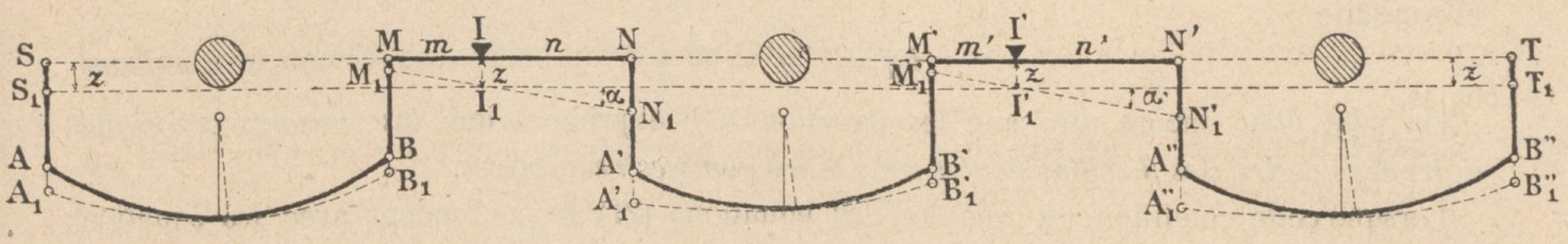
Si celui-ci est à appui sphérique central, il est clair que ses ressorts n'opposeront aucune résistance aux mouvements de roulis. Par suite, dans l'application de la formule (16) les éléments de ces ressorts devront être exclus de la somme $\Sigma \frac{\nu^2}{i}$. Si nous désignons par $\Sigma \frac{\upsilon^2}{i}$ la somme des termes ainsi exclus, la formule en question devient

$$\theta' = \frac{\varphi\rho' - \Sigma sy}{2\left(\Sigma \frac{\nu^2}{i} - \Sigma \frac{\upsilon^2}{i}\right) - Qh} \tag{20}$$

dont l'analogie avec la formule (19) est évidente.

Cas où la machine est pourvue de balanciers longitudinaux. — Supposons que les ressorts de suspension AB, A′B′, A″B″ de trois essieux consécutifs (Fig. 6) soient conjugués

Fig. 6.



de chaque côté de la machine par des balanciers MN, M′N′ mobiles autour des couteaux I et I′ et que sous l'action d'une force φ dirigée de haut en bas le châssis subisse une translation verticale z. Les points

$$A\,B,\ A'\,B',\ A''\,B'',\ M,\ I,\ N,\ \text{etc...}$$

viendront respectivement en

$$A_1\,B_1,\ A'_1\,B'_1,\ A''_1\,B''_1,\ M_1,\ I_1,\ N_1\ \text{etc...}$$

et l'on aura les égalités

$$AA_1 = SS_1 = II_1 = I'I'_1 = TT_1 = z.$$

Soient $m\ n$, $m'\ n'$ les longueurs respectives des balanciers MN, M′N′, et α, α' les angles dont ces balanciers supposés d'abord horizontaux tourneront autour de leurs axes pendant que le châssis se transporte de S T en S_1 T_1.

Nous pouvons écrire pour l'équilibre des ressorts

$$\begin{aligned} 2\,i\,\Delta q &= 2\,z - m\,\alpha \\ 2\,i'\,\Delta q' &= 2\,z + n\,\alpha - m'\,\alpha' \\ 2\,i''\,\Delta q'' &= 2\,z + n'\,\alpha' \end{aligned} \qquad (21)$$

et pour l'équilibre des balanciers

$$\begin{aligned} m\,\Delta q &= n\,\Delta q' \\ m'\,\Delta q' &= n'\,\Delta q'' \end{aligned} \qquad (22)$$

On a ainsi cinq équations qui permettent après élimination des angles α et α' de déterminer les valeurs de Δq, $\Delta q'$, $\Delta q''$ qu'il y a lieu de substituer, dans les équations (1) et (2), à celles précédemment fournies par les trois équations du groupe (3) correspondant aux trois essieux conjugués. On déterminerait ainsi aisément la valeur de x ainsi que celle de la dépression z produite par la force φ.

Mais, si on désire, et cela paraît en effet désirable, que les balanciers ne jouent pas dans le cas particulier que nous considérons, il faut que les angles α et α' soient nuls tous les deux, et alors l'élimination de Δq, $\Delta q'$ et $\Delta q''$ entre les équations (21) et (22) conduit aux équations de condition

$$\begin{aligned} m\,i' &= n\,i \\ m'\,i'' &= n'\,i' \end{aligned} \qquad (23)$$

qui expriment que *les flexibilités de deux ressorts conjugués par un même balancier doivent être proportionnelles aux longueurs de ses bras.*

On a évidemment aussi

$$m\,q \;=\; n\,q'$$
$$m'\,q' = n'\,q''$$

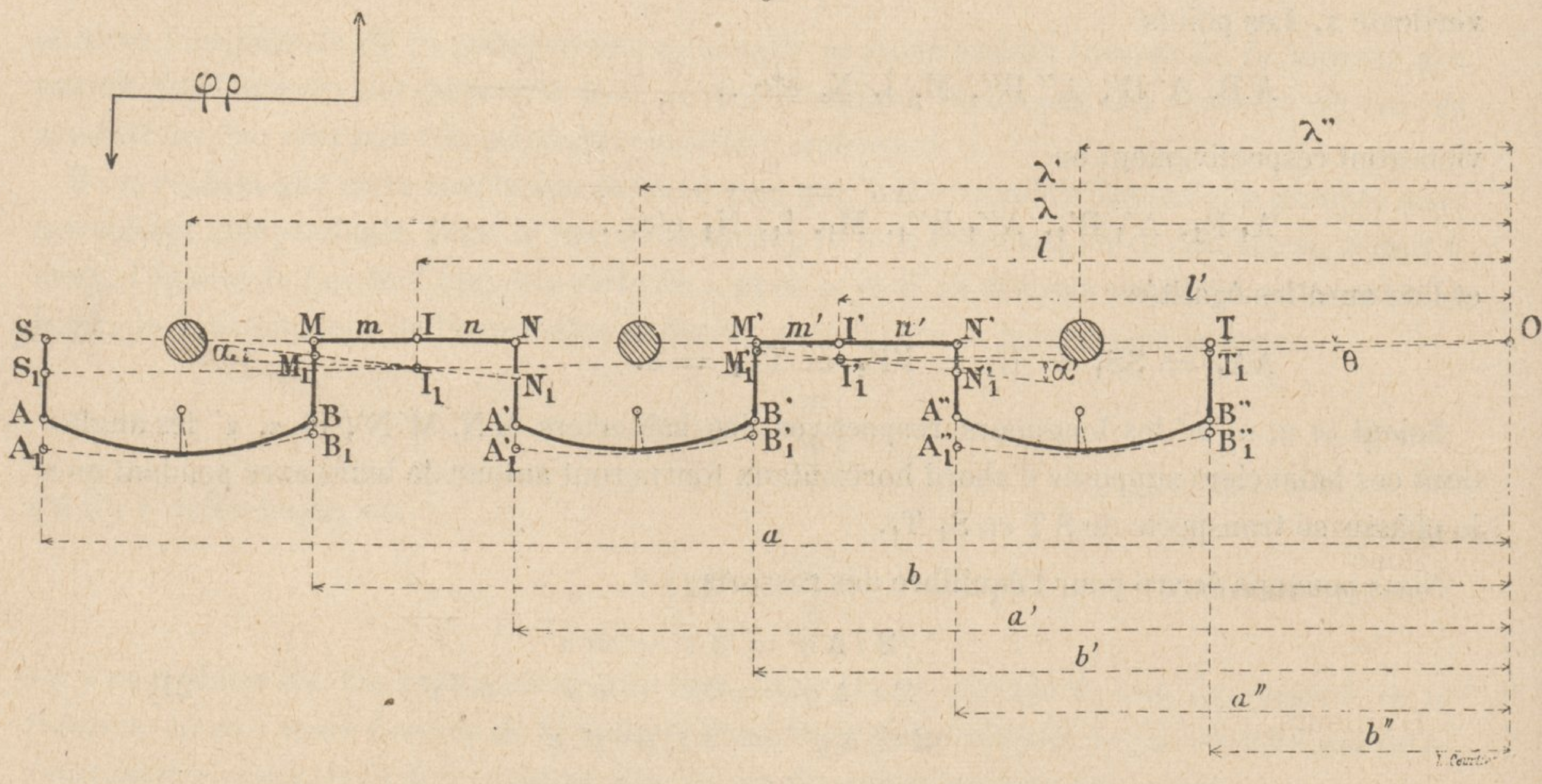
et par suite

$$i\,q = i'\,q' = i''\,q''$$

On peut donc encore dire que les équations (23) expriment que *les ressorts conjugués doivent prendre des flexions égales sous leurs charges respectives.*

Lorsque cette condition est remplie, les équations (21) se confondent avec les équations correspondantes du groupe (3) et, par suite, les formules (4) et (5) sont applicables.

Fig. 7.



Substituons actuellement à la force φ le couple $\varphi\,\rho$ (Fig. 7) et les équations (23) étant supposées satisfaites, désignons respectivement par

$$a, b;\; a', b';\; a'', b'';\; l, l',$$

les distances horizontales des points

$$A, B;\; A', B';\; A'', B'';\; I, I',$$

à l'axe de la rotation qui sera produite par ce couple, les distances horizontales des différents essieux au même axe continuant à être désignées par $\lambda, \lambda', \ldots\ldots\ldots \lambda^{(p-1)}$

Si θ est l'amplitude de la rotation on a évidemment

$$SS_1, = \theta\,a$$
$$I\,I_1 = \theta\,l$$
$$I'\,I'_1 = \theta\,l'$$
$$T\,T_1 = \theta\,b''$$

et les équations d'équilibre des ressorts sont

$$2\,i\;\;\Delta q = \theta\,a + \theta\,l - m\,\alpha$$
$$2\,i'\;\Delta q' = \theta\,l + \theta\,l' + n\,\alpha - m'\,\alpha'$$
$$2\,i''\,\Delta q'' = \theta\,l' + \theta\,b'' + n'\,\alpha'$$

Exprimons a, l, l', b'', en fonction de λ, λ', λ'' m, n, m', n' et posons d'autre part

$$U = 1 + \frac{\alpha}{\theta}$$

$$U' = 1 + \frac{\alpha'}{\theta}$$

les équations ci-dessus prennent alors la forme

$$\begin{aligned} 2\,i\ \ \Delta q &= \theta\,(2\lambda - m\,U) \\ 2\,i'\ \Delta q' &= \theta\,(2\lambda' + n\,U - m'\,U') \\ 2\,i''\ \Delta q'' &= \theta\,(2\lambda'' + n'\,U') \end{aligned} \tag{24}$$

On en tire

$$\Delta q = \frac{\theta\,\lambda}{i} - \frac{m\,U}{2\,i}$$

$$\Delta q' = \frac{\theta\lambda'}{i'} + \frac{n\,U}{2\,i'} - \frac{m'\,U'}{2\,i'}$$

$$\Delta q'' = \frac{\theta\,\lambda''}{i''} + \frac{n'\,U'}{2\,i''}$$

mais en vertu des équations (23)

$$\frac{m}{i} = \frac{n}{i'}$$

$$\frac{m'}{i'} = \frac{n'}{i''}$$

Donc

$$\Delta q + \Delta q' + \Delta q'' = \frac{\theta\,\lambda}{i} + \frac{\theta\lambda'}{i'} + \frac{\theta\,\lambda''}{i''}$$

D'ailleurs

$$\begin{aligned} \Delta q''' &= \frac{\theta\lambda'''}{i'''} \\ \Delta q^{\mathrm{IV}} &= \frac{\theta\,\lambda^{\mathrm{IV}}}{i^{\mathrm{IV}}} \end{aligned} \tag{25}$$

......etc......

de sorte qu'on peut écrire

$$\Sigma\,\Delta\,q = \theta\,\Sigma\,\frac{\lambda}{i}$$

et comme le 1er membre de cette égalité est nul en vertu de (6) on a

$$\Sigma\,\frac{\lambda}{i} = 0$$

Donc, l'axe de la rotation passe encore par le centre élastique de la machine tel que nous l'avons défini, et *l'application de balanciers longitudinaux ne change rien ni à la position ni aux propriétés du centre élastique.*

Revenons aux équations (24). On en tire encore, en les combinant avec les équations (23) et (25).

$$2\,\Sigma\lambda\,\Delta q = \theta\left[2\,\Sigma\,\frac{\lambda^2}{i} - \frac{m}{i}\,(\lambda - \lambda')\,U - \frac{m'}{i'}\,(\lambda' - \lambda'')\,U'\right]$$

expression où $\Sigma\,\frac{\lambda^2}{i}$ s'étend à tous les essieux de la machine et dans laquelle il reste à déterminer U et U'.

Or, des équations (22) et (23) nous tirons :

$$i\,\Delta q = i'\,\Delta q' = i''\,\Delta q''$$

égalités qui, combinées avec les équations (24), donnent

$$U = 2\,\frac{m'\,(\lambda - \lambda'') + n'\,(\lambda - \lambda')}{mm' + nn' + mn'}$$

$$U' = 2\,\frac{m\,(\lambda' - \lambda'') + n\,(\lambda - \lambda'')}{mm' + nn' + mn'}$$

Portant ces valeurs dans l'expression de $2\,\Sigma\,\lambda\,\Delta q$ et remplaçant les m et n par les i qui leur sont proportionnels, on obtient, après réductions

$$2\,\Sigma\lambda\,\Delta q = \theta\left[2\,\Sigma\,\frac{\lambda^2}{i} - 2\,\frac{i\,(\lambda' - \lambda'')^2 + i'\,(\lambda'' - \lambda)^2 + i''\,(\lambda - \lambda')^2}{i'i'' + i''i + ii'}\right]$$

Mais le deuxième terme entre crochets peut encore être simplifié grâce à la considération du centre élastique spécial au groupe des essieux conjugués.

Soient μ, μ', μ'' les distances horizontales positives ou négatives des essieux conjugués à ce centre, il est clair que dans le terme en question on pourra remplacer λ, λ', λ'' respectivement par μ, μ', μ''. Or, si on tient compte que par définition

$$\frac{\mu}{i} + \frac{\mu'}{i'} + \frac{\mu''}{i''} = 0$$

il est facile de montrer que

$$\frac{i\,(\mu' - \mu'')^2 + i'\,(\mu'' - \mu)^2 + i''\,(\mu - \mu')^2}{i'\,i'' + i''i + i\,i'} = \frac{\mu^2}{i} + \frac{\mu'^2}{i'} + \frac{\mu''^2}{i''}$$

ce qui nous permet de poser finalement

$$2\,\Sigma\lambda\,\Delta q = 2\,\theta\left(\Sigma\,\frac{\lambda^2}{i} - \Sigma\,\frac{\mu^2}{i}\right)$$

Portons cette valeur dans l'équation (10) nous aurons

$$2\,\theta\left(\Sigma\,\frac{\lambda^2}{i} - \Sigma\,\frac{\mu^2}{i}\right) - Q\,\theta\,h = \varphi\,\rho - \Sigma\,r\,y \qquad (26)$$

d'où

$$\theta = \frac{\varphi\,\rho - \Sigma\,r\,y}{2\left[\Sigma\,\frac{\lambda^2}{i} - \Sigma\,\frac{\mu^2}{i}\right] - Q\,h} \qquad (27)$$

formule dans laquelle $\Sigma \dfrac{\mu^2}{i}$ peut comprendre plusieurs sommes de termes semblables correspondant à plusieurs groupes d'essieux conjugués.

Si on considère que le dernier terme du dénominateur est généralement négligeable par rapport au premier, on peut en conclure que lorsqu'une locomotive montée sur ressorts d'égale flexibilité comporte un ou plusieurs groupes d'essieux conjugués par des balanciers, *l'amplitude de la rotation due au couple $\varphi\rho$ est très sensiblement en raison inverse de la somme des carrés des distances des essieux à leur centre élastique diminuée des sommes de carrés analogues fournies par chaque groupe d'essieux conjugués considérés en particulier.*

On remarquera l'identité des formules (19 et 27) établies dans l'hypothèse que bogies et balanciers conservent leur horizontalité sous l'action d'une force verticale appliquée au centre élastique général. Ces conditions étant supposées remplies, et toutes choses restant égales d'ailleurs, on pourra substituer, à un bogie de n essieux, un système de n essieux semblables conjugués par des balanciers longitudinaux, sans qu'il en résulte aucune modification dans l'amplitude des déplacements relatifs imposés au châssis par un couple méridien et généralement par une force verticale quelconque.

Inconvénient de la conjugaison complète. — Suspension folle. — Les formules (19 et 27) montrent clairement que θ grandit avec le nombre des essieux groupés sous un châssis distinct, ou conjugués par une série ininterrompue de balanciers longitudinaux. Considérons le cas extrême où ce nombre d'essieux comprend la totalité de ceux qui portent la machine. Il vient alors

$$\Sigma \frac{\lambda^2}{i} - \Sigma \frac{\mu^2}{i} = 0$$

Par suite, l'altitude critique du centre de gravité relative à l'axe du galop est nulle et la suspension est folle autour de cet axe, à moins que l'altitude effective h du dit centre de gravité ne soit négative, circonstance dont la pratique ne paraît offrir aucun exemple.

Ces conclusions sont évidentes à priori dans le cas d'un bogie qui supporterait à lui seul, en deux points situés sur une même normale au plan méridien, le poids du châssis principal, et les inconvénients d'une semblable disposition, tout à fait irrationnelle en elle-même, sautent aux yeux.

Il n'en est pas de même dans le cas de la conjugaison complète, attendu qu'elle a été effectivement réalisée autrefois (1). L'instabilité de l'équilibre auquel elle conduit est cependant susceptible d'une démonstration directe dont le principe est fort simple.

(1) Voir *Couche*, Voie, Matériel roulant, etc., des chemins de fer, Tome II, page 428. Les bogies de la voiture automotrice électrique " S " de la « Studiengesellschaft für elektrische Schnellbahnen » qui a circulé entre Marienfelde et Zossen présentent également un exemple de conjugaison complète. Mais il ne faut pas perdre de vue que le châssis principal repose sur chacun des bogies par l'intermédiaire de quatre semelles planes disposées suivant les sommets d'un rectangle et qu'il en résulte pour les châssis des bogies une solidarité partielle avec le châssis principal, solidarité qui ne leur permet de prendre par rapport à ce dernier, ni galop, ni roulis relatifs. Tel n'est pas le cas du bogie des locomotives à grande vitesse de la Compagnie P.-L.-M., où pour éviter les inconvénients pouvant résulter de l'emploi simultané des balanciers longitudinaux et d'une crapaudine sphérique centrale, on a dû rattacher le châssis du bogie au châssis principal au moyen d'une bielle, assez longue pour ne pas gêner les déplacements relatifs du bogie dans le sens horizontal.

Rappelons d'abord que les charges

$$q, q', q'', \ldots\ldots\ldots\ldots q^{(p-1)}$$

supportées de chaque côté de la machine par les différents ressorts sont toujours liées entre elles par les deux équations

$$2\,\Sigma\, q = Q \qquad (28)$$

$$\Sigma\, \delta q = 0 \qquad (29)$$

et que chaque couple de balanciers longitudinaux placés entre deux essieux consécutifs établit une nouvelle relation entre ces p quantités. *La répartition des charges entre les différents essieux est donc entièrement déterminée lorsqu'il existe entre les ressorts $p-2$ conjugaisons distinctes par balanciers longitudinaux,* autrement dit lorsque les essieux peuvent être divisés en deux groupes indépendants l'un de l'autre, mais dont chacun comporte le maximum de conjugaisons.

Si ces deux groupes sont eux-mêmes reliés par des balanciers, de telle sorte que le nombre total de conjugaisons s'élève à $p-1$, les p quantités $q, q', \ldots\ldots\ldots\ldots q^{(p-1)}$ devront satisfaire à $p+1$ équations entre lesquelles on pourra les éliminer. On obtiendra ainsi la relation qui doit exister obligatoirement entre les données de la question, c'est-à-dire entre les valeurs de δ, δ' etc., et celles des bras m, n, m', n', etc., des balanciers, pour que les $p+1$ équations précitées soient compatibles entre elles et, par suite, pour que l'équilibre puisse s'établir effectivement entre les forces considérées.

Soient

$$mq = nq'$$
$$m'q' = n'q''$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$m^{(p-2)}\, q^{(p-2)} = n^{(p-2)}\, q^{(p-1)}$$

les $(p-1)$ relations créées par les conjugaisons.

On en déduit aisément les égalités

$$q' = \frac{m}{n}\, q$$

$$q'' = \frac{m\, m'}{n\, n'}\, q$$

$$q''' = \frac{m\, m'\, m''}{n\, n'\, n''}\, q$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$q^{(p-1)} = \frac{m\, m' \ldots\ldots\ldots\ldots m^{(p-2)}}{n\, n' \ldots\ldots\ldots\ldots n^{(p-2)}}\, q$$

Multiplions les deux membres de la première par δ'
ceux de la deuxième par.......... .... δ''
etc. ; égalons ensuite la somme des premiers membres à la somme des seconds membres ; nous obtenons ainsi, en tenant compte d'ailleurs de l'équation (29) la relation

$$\delta + \frac{m}{n}\,\delta' + \frac{m\, m'}{n\, n'}\,\delta'' + \ldots\ldots \ldots\ldots \frac{m\, m'\, m'' \ldots\ldots m^{(p-2)}}{n\, n'\, n'' \ldots\ldots n^{(p-2)}}\,\delta^{(p-1)} = 0$$

qu'on peut encore écrire :

$$\frac{\delta}{mm'm''\ldots m^{(p-2)}}+\frac{\delta'}{nm'm''\ldots m^{(p-2)}}+\frac{\delta''}{nn'm''\ldots m^{(p-2)}}+\ldots+\frac{\delta^{(p-1)}}{nn'n''\ldots n^{(p-2)}}=0 \qquad (30)$$

Telle est l'équation de condition qui doit être satisfaite pour que l'équilibre puisse avoir lieu.

Cela posé, soient

$$\Delta q,\ \Delta q',\ \Delta q''\ldots\ldots\ldots\ldots\ \Delta q^{(p-1)}$$

les variations que semblent devoir éprouver les réactions des ressorts sous l'influence d'un couple perturbateur situé dans un plan parallèle au plan méridien. Nous aurons pour l'équilibre des balanciers

$$\begin{aligned} m\,\Delta q &= n\,\Delta q' \\ m'\,\Delta q' &= n'\,\Delta q'' \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ m^{(p-2)}\,\Delta q^{(p-2)} &= n^{(p-2)}\,\Delta q^{(p-1)} \end{aligned} \qquad (31)$$

Divisons les deux membres de la première de ces égalités par $n\,n'\,n'\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ n^{(2-p)}$
ceux de la deuxième par.. $m\,n'\,n''\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ n^{(p-2)}$
ceux de la troisième par.. $m\,m'\,n''\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ n^{(p-2)}$
....
ceux de la dernière par.. $m\,m'\,m''\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ m^{(p-3)}\,n^{(p-2)}$

Nous pouvons ainsi remplacer les équations (31) par les suivantes :

$$\frac{\Delta q}{n\,n'\,n''\ldots n^{(p-2)}}=\frac{\Delta q'}{m\,n'\,n''\ldots n^{(p-2)}}=\frac{\Delta q''}{m\,m'\,n''\ldots n^{(p-2)}}\ldots=\frac{\Delta q^{(p-1)}}{m\,m'm''\ldots m^{(p-2)}} \qquad (32)$$

chaque dénominateur se déduisant du précédent par la transformation du facteur n le moins accentué en m, le nombre des accents étant d'ailleurs conservé.

Soit $\Sigma\,D$ la somme de ces dénominateurs, les équations (32) nous donnent

$$\begin{aligned} \Delta q &= n\,n'\ldots\ldots n^{(p-2)}\,\frac{\Sigma\,\Delta q}{\Sigma\,D} \\ \Delta q' &= m\,n'\ldots\ldots n^{(p-2)}\,\frac{\Sigma\,\Delta q}{\Sigma\,D} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Delta q^{(p-1)} &= m\,m'\ldots\ldots m^{(p-2)}\,\frac{\Sigma\,\Delta q}{\Sigma\,D} \end{aligned}$$

mais $\Sigma\,\Delta\,q$ étant nul, il est clair qu'on doit avoir séparément

$$\begin{aligned} \Delta q &= 0 \\ \Delta q' &= 0 \\ &\ldots\ldots \\ \Delta q^{(p-1)} &= 0 \end{aligned}$$

autrement dit que *les ressorts n'opposeront aucune résistance au mouvement de rotation que déterminera le couple perturbateur*, *si faible qu'il soit.*

Soient d'ailleurs $\lambda, \lambda', \lambda''$ .... $\lambda^{(p-1)}$ les distances des essieux à l'axe de la rotation. Les équations d'équilibre des ressorts, analogues aux équations (24) précédemment établies, prendront la forme

$$\begin{aligned} \lambda &= m\,U \\ \lambda' &= m'\,U' - n\,U \\ \lambda'' &= m''\,U'' - n'\,U' \\ &\dots\dots\dots\dots \\ \lambda^{(p-1)} &= -\,n^{(p-2)}\,U^{(p-2)} \end{aligned}$$

Pour éliminer U, U',............U $^{(p-2)}$ entre ces p équations, il suffit de les ajouter, après avoir divisé les deux membres de la première par

$$m\,m'\,m'' \dots\dots\dots\dots m^{(p-2)}$$

les deux membres de la deuxième par

$$n\,m'\,m'' \dots\dots\dots\dots m^{(p-2)}$$

etc.... chaque diviseur se déduisant du précédent en changeant en n le facteur m le moins accentué. On arrive ainsi à l'égalité

$$\frac{\lambda}{mm'm''..m^{(p-2)}} + \frac{\lambda'}{nm'm''..m^{(p-2)}} + \dots\dots \frac{\lambda^{(p-1)}}{n\,n' \dots\dots n^{(p-2)}} = 0$$

qui ne diffère de l'équation de condition (30) que par la substitution des λ aux δ.

Or, nous avons posé antérieurement

$$\begin{aligned} \lambda &= \delta - x \\ \lambda' &= \delta' - x \\ &\dots\dots\dots \\ \lambda^{(p-1)} &= \delta^{(p-1)} - x \end{aligned}$$

On en conclut que

$$x = 0$$

ce qui veut dire que *l'axe de la rotation est situé dans le plan transversal mené par le centre de gravité du poids suspendu.*

Ainsi, d'une part, le centre de gravité du poids suspendu se projette sur l'axe éventuel de la rotation, d'autre part, les ressorts sont incapables d'opposer aucune résistance à un mouvement qui se produirait autour de cet axe. Dans ces conditions l'équilibre du système considéré ne peut être stable que si son centre de gravité est situé au-dessous de l'axe de la rotation, c'est-à-dire au dessous des essieux moteurs. Dans le cas contraire qui est celui de la grande majorité, sinon de l'universalité des locomotives, *la suspension est folle.*

On remarquera que cette démonstration, absolument générale, est *indépendante de toute hypothèse sur les flexibilités i, i',........* $i^{(p-1)}$ des ressorts de suspension. Il est d'ailleurs aisé de montrer que dans le cas qui nous occupe *la projection du centre de gravité du poids suspendu sur le plan mené par les axes des essieux accouplés jouit de toutes les propriétés du centre élastique, quelles que soient les flexibilités précitées.*

Considérons, en effet, une force perturbatrice φ située dans le plan méridien et proposons-nous de déterminer la valeur qui doit prendre la distance x de cette force au centre de gravité du poids suspendu, pour qu'il ne se produise aucune rotation.

L'équation (2) nous donne

$$x = -\frac{2}{\varphi} \Sigma \delta \Delta q$$

Or, le fonctionnement des balanciers assure les relations

$$\Delta q' = \frac{m}{n} \Delta q$$

$$\Delta q'' = \frac{m'}{n'} \Delta q'$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\Delta q^{(p-1)} = \frac{m^{(p-2)}}{n^{(p-2)}} \Delta q^{(p-2)}$$

Multipliant les deux membres de la 1ère par δ', ceux de la seconde par δ'', etc...., et ajoutant il vient

$$\Sigma \delta \Delta q = \Delta q \left[\delta + \frac{m}{n} \delta' + \frac{mm'}{nn'} \delta'' + \dots\dots\dots + \frac{m\, m'\, m'' \dots\, m^{(p-2)}}{n\, n'\, n'' \dots\dots n^{(p-2)}} \delta^{(p-1)} \right]$$

Le second membre de cette équation étant nul en vertu de l'équation de condition (30), on a

$$\Sigma \delta \Delta q = 0$$

et par conséquent aussi

$$x = 0$$

ce qui complète la démonstration du principe ci-dessus énoncé.

Nous ajouterons que ce principe n'est nullement en contradiction avec celui que nous avons établi antérieurement, savoir que l'axe du galop satisfait à l'équation

$$\Sigma \frac{\lambda}{i} = 0$$

toutes fois que les équations (23) ont lieu.

Celles-ci s'écrivent en effet :

$$m\, i' = n\, i$$

$$m'\, i'' = n'\, i'$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$m^{(p-2)}\, i^{(p-1)} = n^{(p-2)}\, i^{(p-2)}$$

On en déduit

$$\frac{m}{n} = \frac{i}{i'}$$

$$\frac{m\, m'}{n\, n'} = \frac{i}{i''}$$

$$\dots\dots\text{etc}\dots\dots$$

et alors l'équation de condition (30) s'écrit

$$\Sigma \frac{\delta}{i} = 0$$

qui signifie que le centre élastique se trouve sur la verticale du centre de gravité.

Cas où la machine est pourvue de balanciers transversaux. — Un balancier transversal met les ressorts qu'il conjugue hors d'état de réagir lorsque la masse suspendue exécute une rotation autour de l'axe du roulis. La formule (16) qui donne la valeur de θ reste applicable dans ce cas, mais comme dans celui du bogie à appui central sphérique, il y a lieu d'éliminer de la somme $\Sigma \frac{v^2}{i}$, qui figure au dénominateur de cette formule, les termes relatifs aux ressorts conjugués. Soit $\Sigma \frac{\upsilon^2}{i}$ la somme de ces derniers termes, l'amplitude de la rotation est alors

$$\theta' = \frac{\varphi \rho' - \Sigma s y}{2\left(\Sigma \frac{v^2}{i} - \Sigma \frac{\upsilon^2}{i}\right) - Qh} \tag{33}$$

formule qui ne diffère pas de la formule (20).

Elle fait voir que la conjugaison des ressorts par balanciers transversaux a pour effet d'accroître l'amplitude de la rotation due à un couple transversal donné et cela d'autant plus que le nombre des ressorts conjugués est plus important. En même temps l'altitude critique du centre de gravité relative à l'axe du roulis s'abaisse.

Si tous les ressorts étaient conjugués deux à deux par des balanciers transversaux, la suspension deviendrait folle, comme dans le cas que nous venons d'étudier, mais autour d'un axe longitudinal et cela pour toutes les altitudes positives du centre de gravité.

Résumé. — Les principales conclusions du présent chapitre sont les suivantes :

I. — Les bogies pourvus de surfaces d'appui planes ne leur permettant de prendre par rapport au châssis principal que des mouvements relatifs horizontaux, ne peuvent avoir par eux-mêmes aucune influence sensible sur le fonctionnement des organes de la suspension. Le fonctionnement est, en général, le même que s'il n'y avait pas de bogie.

II. — Lorsqu'il est fait usage de bogies susceptibles de prendre par rapport au châssis principal un mouvement relatif de galop, mais disposés de manière à conserver leur horizontalité lorsque le châssis principal s'élève ou s'abaisse, le fait d'avoir ainsi groupé des essieux sous des châssis distincts ne change rien ni à la position ni aux propriétés du centre élastique.

III. — Lorsque les ressorts de suspension d'un certain nombre d'essieux sont coujugués entre eux par des balanciers longitudinaux, distribués comme on voudra, mais disposés de manière à conserver leur horizontalité lorsque le châssis principal se déplace verticalement sans s'incliner, la conjugaison ainsi établie ne change rien ni à la position ni aux propriétés du centre élastique.

IV. — L'emploi de bogies ou de balanciers longitudinaux remplissant la condition énoncée aux §§ II et III ci-dessus a pour effet :

1° D'accroître l'amplitude de la rotation due à un couple situé dans le plan méridien ;

2° D'abaisser l'altitude critique du centre de gravité relative à l'axe du galop.

V. — Ces variations restent, toutes choses égales d'ailleurs, identiques à elles-mêmes lorsque n essieux conjugués par une série ininterrompue de balanciers longitudinaux sont remplacés par un bogie de n essieux et réciproquement.

VI. — Leur importance croît avec le nombre des essieux groupés sous un même bogie ou dont les ressorts ont été conjugués par une série ininterrompue de balanciers longitudinaux. Lorsque ce nombre comprend la totalité des essieux de la machine, l'altitude critique du centre de gravité relative à l'axe du galop est nulle. Par conséquent la suspension est folle, à moins que l'altitude effective du dit centre de gravité ne soit négative.

VII. — L'emploi d'un bogie à appui sphérique central ou de balanciers transversaux a pour effet :

1°. — D'accroître l'amplitude de la rotation due à un couple situé dans un plan transversal ;

2°. — D'abaisser l'altitude critique du centre de gravité relative à l'axe du roulis.

VIII. — Ces effets sont d'autant plus accusés que le nombre des essieux groupés sous le bogie ou dont les ressorts sont conjugués par des balanciers transversaux est plus grand. Si ce nombre comprenait la totalité des essieux de la machine, l'altitude critique du centre de gravité relative à l'axe du roulis serait nulle. Par suite, la suspension serait folle transversalement, à moins que l'altitude effective du dit centre de gravité ne fût négative.

(*à continuer*).